Unterstützung durch den ClassPad II bei der Einführung des Ableitungsbegriffs

Jens Weitendorf

Kurzfassung des Inhalts:
In dem Artikel wird keine einzelne Lerneinheit dargestellt; sondern es wird gezeigt, inwiefern der ClassPad in einzelnen Phasen des Unterrichts bei der Einführung des Ableitungsbegriffs hilfreich für das Verständnis der Schülerinnen und Schüler sein kann.

Klassenstufe(n):
Sekundarstufe II

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler ...

- erfahren, dass ein CAS verständnisfördernd ist, da man den Rechenaufwand minimieren und leicht die Darstellungsebene wechseln kann.
- verstehen den Übergang von der Änderungsrate in einem Punkt zur Ableitungsfunktion durch eine dynamische Darstellung.
- erkennen, dass ein CAS eine elektronische Formelsammlung ist.

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:
Keine

Zeitbedarf:
Der Zeitbedarf lässt sich nicht angeben, da nur unterstützende Möglichkeiten beschrieben werden.

Sonstige Materialien:
Keine

Einführung

Der Rechenaufwand in der klassischen Analysis ist relativ hoch. Allein schon aus diesem Grund erscheint der Einsatz des ClassPad als hilfreich, wenn man den Unterricht bzgl. des Rechnens entlasten möchte. Ein großer Vorteil ergibt sich daraus, dass man nicht mehr auf Funktionsklassen beschränkt ist, die sich händisch, das heißt insbesondere hinsichtlich des Lösens von Gleichungen bearbeiten lassen. So ist es für die Bearbeitung von Aufgaben nicht mehr ganz so von Bedeutung, wie kompliziert die zur Diskussion stehenden Terme sind. Des Weiteren verliert auch das Zeichnen von Funktionsgraphen an Bedeutung, da man die Graphen sofort per Knopfdruck mit Hilfe eines Funktionsplotters erhält. Es geht also nicht mehr darum, aus Berechnungen den Graphen einer Funktion zu zeichnen, sondern Zusammenhänge zwischen Funktionstermen und deren Graphen zu erkennen. Die Frage, wie ein Analysisunterricht mit einem CAS zu gestalten ist, lässt noch viele Möglichkeiten offen und kann natürlich auch nicht mit diesem Beitrag beantwortet werden. Es gibt aber inzwischen in vielen Schulbüchern CAS-Hinweise, wobei sich der Aufbau dieser Bücher allerdings nur unwesentlich von einem Buch ohne CAS Einsatz unterscheidet.

Einen möglichen Unterrichtsgang, der den ClassPad einbezieht, findet man in CiMS Hamburg (2013). Dort ist auch eine Reihe von Aufgaben mit Lösungsvorschlägen dokumentiert. So sind die folgenden Kapitel eher als Ergänzung zu der Dokumentation über das Hamburger CiMS-Projekt zu sehen.

Ableitung an einer Stelle (lokaler Aspekt)

Die Einführung der Ableitung sollte in zwei Schritten erfolgen. Zunächst geht es darum, den Grenzwert des Differenzenquotienten an einer vorgegebenen Stelle zu bestimmen. In der neueren didaktischen Literatur spricht man in der Regel von einem intuitiven Grenzwertbegriff. Was darunter zu verstehen ist, lässt sich mit Hilfe einer Tabellenkalkulation verdeutlichen.

Abbildung 1 zeigt den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für die Funktion mit $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 2$ mit verschiedenen kleinen h-Werten, der vorher im Main-Menü definiert worden ist. Entsprechendes lässt sich natürlich für andere x-Werte und andere Funktionen durchführen. Zu diskutieren ist an dieser Stelle, warum die „1“ nach hinten „durchgeschoben“ wird und warum die beiden letzten Werte „exakt“ 4 sind. Hierzu ist es sinnvoll, die angezeigte Stellenzahl zu erhöhen.

Ableitungsfunktion (globaler Aspekt)

Ein großes Problem für Schülerinnen und Schüler ist der Übergang von der Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion. Dies lässt sich mit Hilfe des ClassPad veranschaulichen. Das Geometrie-Modul bietet die Möglichkeit, an einen vorgegebenen Funktionsgraphen in einem Punkt die Tangente an den Graphen zu legen. Da der ClassPad natürlich im Hintergrund rechnet, ist das Programm in der Lage, die Funktionsgleichung der Tangente anzugeben, woraus sich der Wert der Ableitung an dieser Stelle ergibt. Durch die Dynamik des Systems, kann man den Punkt, an dem die Tangente bestimmt wird, auf dem Graphen wandern lassen. Während dieser „Wanderung“ werden die Punkte als auch die dazugehörenden Tangentensteigungen jeweils neu berechnet und gespeichert. Die Abbildung 2 zeigt das entsprechende Bild.

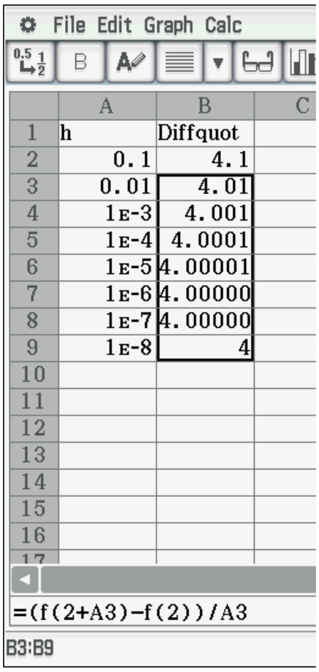

Abb. 1 Bestimmung des intuitiven Grenzwertes des Differenzenquotienten für $f(x) = x^2$ an der Stelle *x=2*

Indem man den Funktionsgraphen und den Punkt A markiert, lässt sich eine sogenannte *Animation hinzufügen*, mit Hilfe derer sich x-Werte und die dazugehörenden Ableitungswerte erzeugen lassen.

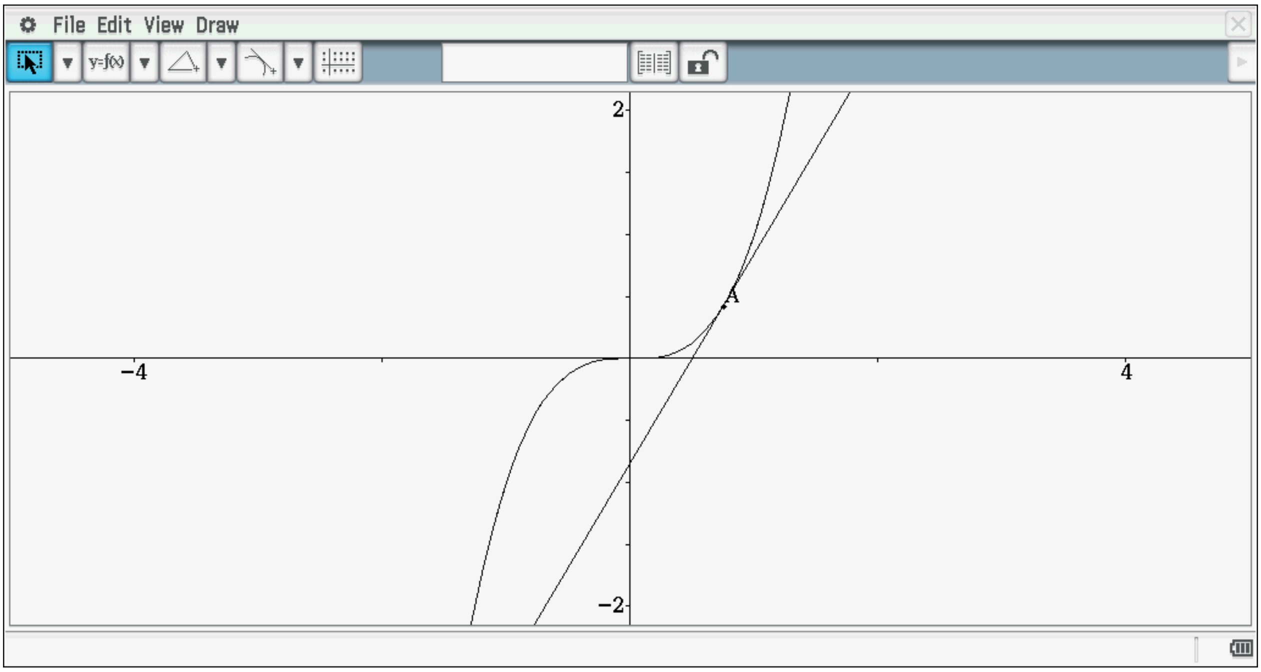

Abb. 2 Graph der Funktion $f(x) = x^3$ mit der Tangente im Punkt A

Die Abbildung 3 zeigt das Ergebnis der durch die *Animation* gewonnenen Werte.

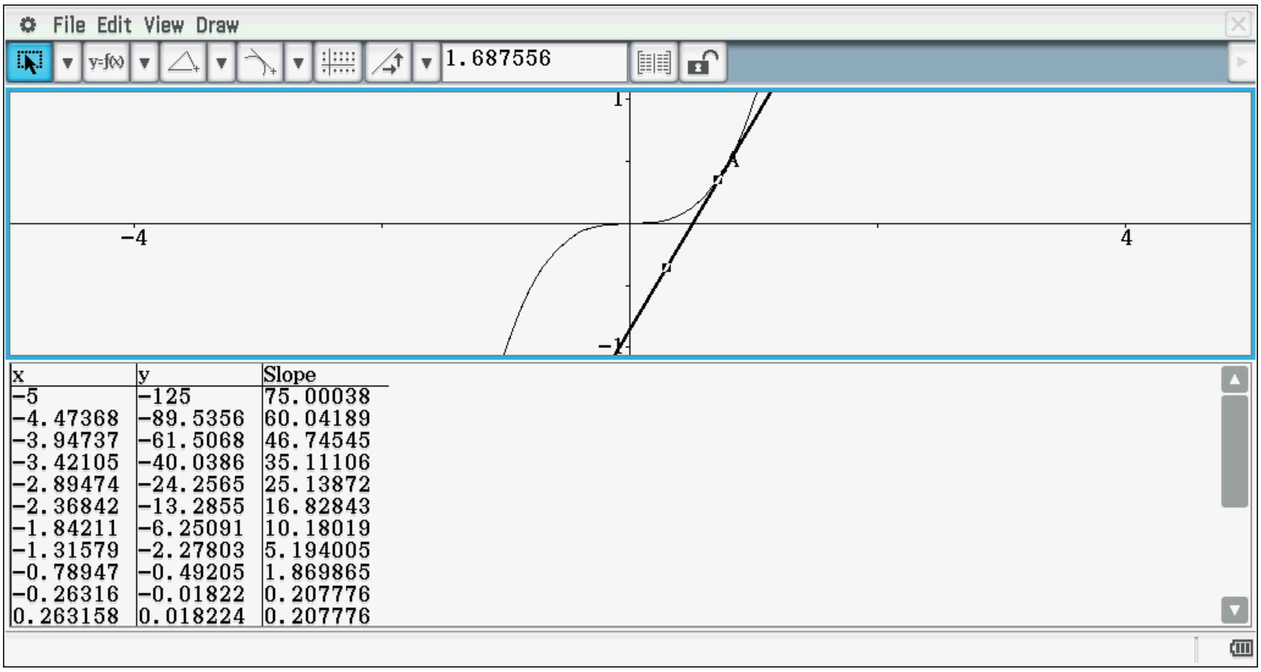

Abb. 3 Mit Hilfe der Animation erzeugte Ableitungswerte

Um sich einen Überblick zu verschaffen, lassen sich die x-Werte und die dazugehörenden Ableitungswerte grafisch darstellen. In der vorgegebenen Einstellung sind die Abstände der x-Werte einmal bewusst sehr groß gewählt, so dass der Graph der Ableitungsfunktion sehr ungenau ist (s. Abbildung 4). Dies lässt sich natürlich verändern (s. Abbildung 5). Dadurch kommt aber der diskrete Charakter dieser Berechnung deutlich zum Ausdruck.

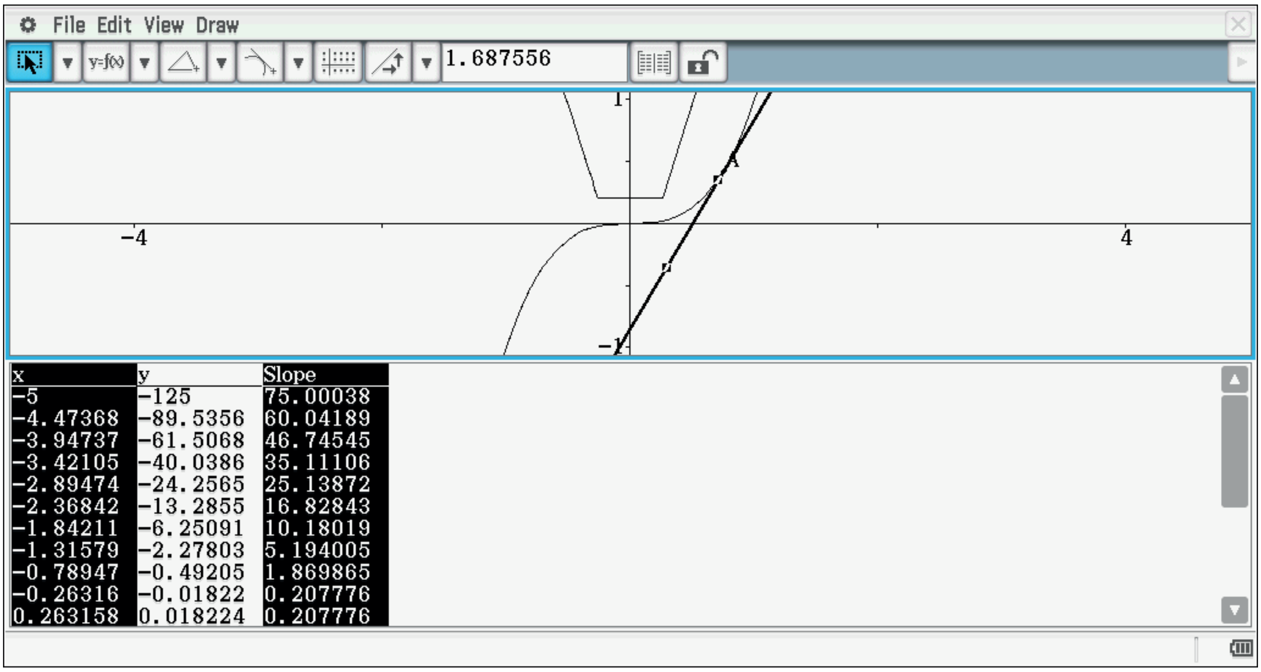

Abb. 4 „Grobe“ Darstellung des Graphen der Ableitungsfunktion (ein Teil dessen ist am oberen Rand zu erkennen)

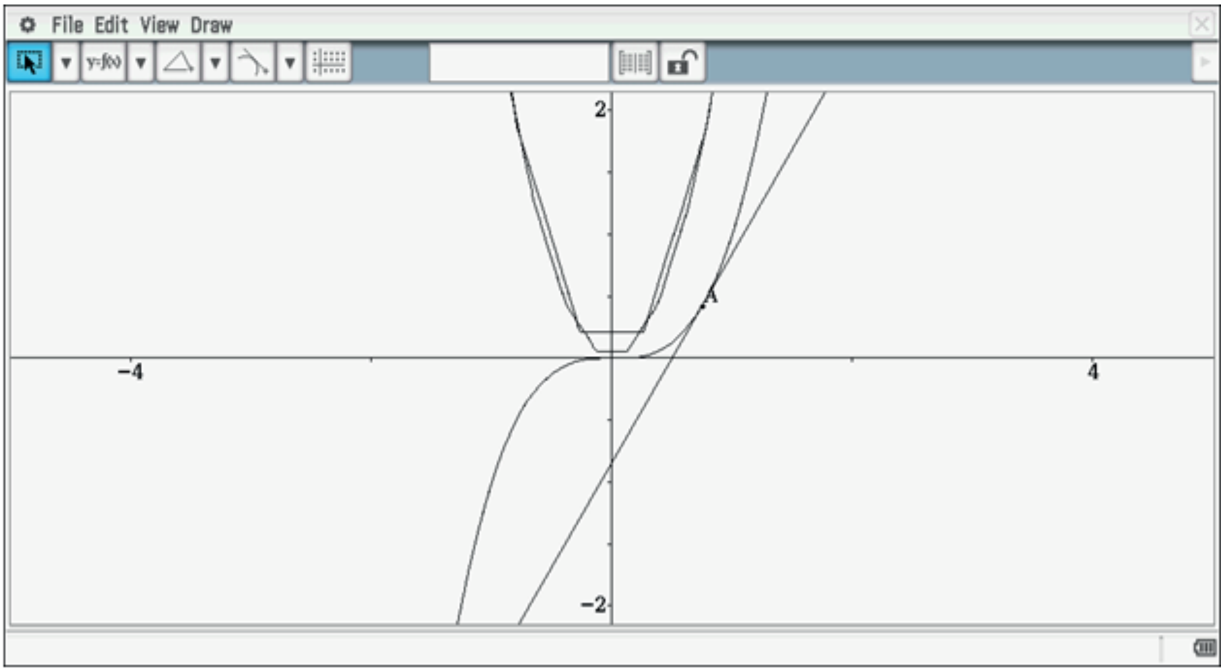

Abb. 5 Graphen der Ableitungsfunktion (Intervall [−5/5] und 40 Schritte)

Schülerinnen und Schüler haben jetzt die Möglichkeit, eigenständig Gleichungen für die jeweiligen Funktionsgraphen der Ableitung zu finden. Sie können dabei durchaus die Zusammenhänge zwischen Funktion und deren Ableitung etwa für Potenz- und trigonometrische Funktionen entdecken. Natürlich muss der Übergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung irgendwann im Unterrichtsverlauf problematisiert werden. Gerade für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler kann aber der zunächst direkt dargestellte Zusammenhang zwischen Graph und Tangente eine Vereinfachung darstellen. Wenn man mit Sekantensteigungen arbeiten möchte, so bietet es sich auch an, einmal Programme wie Geogebra einzusetzen.

Abbildung 6 zeigt eine Darstellung mit Geogebra. Die x-Werte der Punkte A und B unterscheiden sich um $h = 0{,}1$ und lassen sich mit Hilfe des Schiebereglers verändern. Der y-Wert des Punktes M, dessen Spur dargestellt ist, gibt den jeweiligen Differenzenquotienten an; sein x-Wert ist mit dem x-Wert des Punktes A identisch.

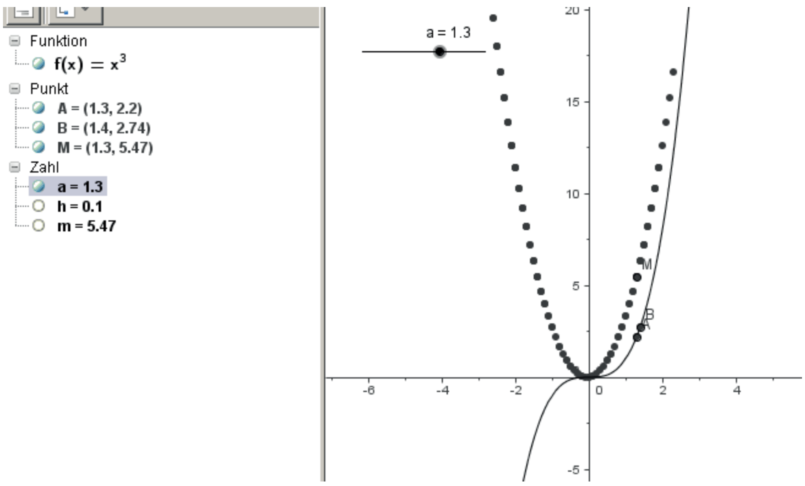

Abb. 6 Erzeugung des Graphen der Ableitung mit Geogebra

Auch hier bietet sich den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, die Ableitungsregeln selbst zu entdecken.

Weitere Ableitungsregeln

Die obige Methode eignet sich auch dazu weitere Ableitungsregeln an ausgewählten Beispielen zu entdecken; so z. B.: $g(x) = f(a \cdot x) \Rightarrow g'(x) = a \cdot f'(x)$. Besonders geeignet ist in diesem Zusammenhang die Sinusfunktion.

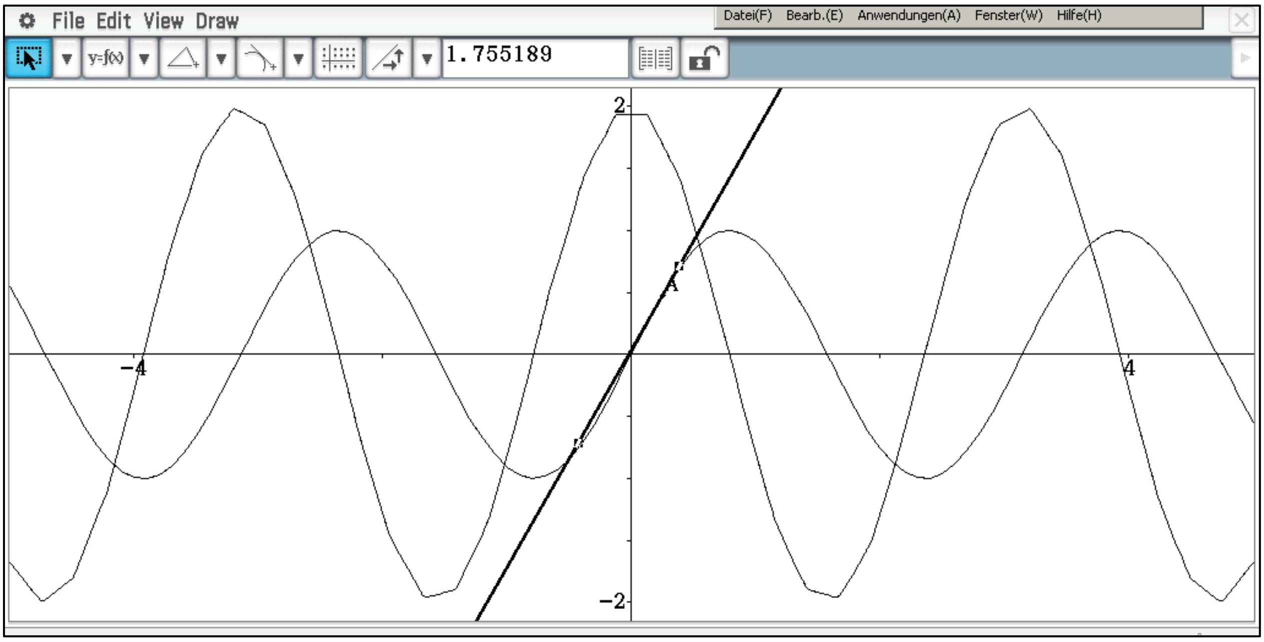

Abb. 7 Graph von $sin(2x)$ und der Ableitung

Aus der Abbildung 7 lässt sich die Funktionsgleichung der Ableitung von $f(x) = sin(2x)$ vermuten und relativ leicht ablesen. Es muss noch diskutiert werden, warum die Amplitude der Ableitungsgleichung bei Abbildung 7 eventuell nicht genau den Wert 2 hat.

Entsprechend lässt sich die Regel für $f(x) = g(x) + h(x)$ finden. Die allgemeine Kettenregel und die Produkt- und Quotientenregel erscheinen aber zu kompliziert zu sein, als dass man sie mit Hilfe von CAS zeichnerisch entdecken könnte. Der ClassPad „kennt“ wegen des CAS diese Ableitungsregeln; ausgenommen ist dabei allerdings die Kettenregel in ihrer einfachsten Form, wie die Abbildung 8 verdeutlicht.

Interpretierungsbedürftig ist der erste Faktor, der sich bei Anwendung der Kettenregel ergibt (s. Abb. 8, 2. Zeile). Durch ein einfaches Beispiel lässt sich aber die Bedeutung dieses Faktors auch durch Schülerinnen und Schüler eigenständig herausfinden (s. Abbildung 9).

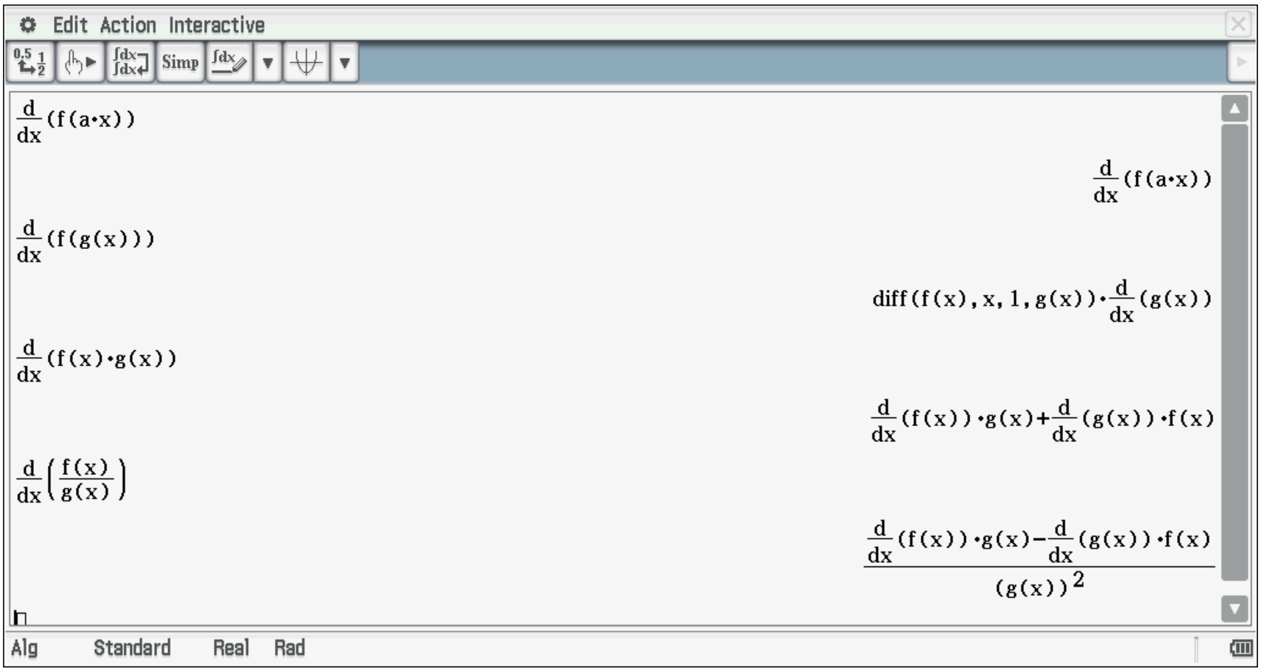

Abb. 8 Ableitungsregeln, CAS als elektronische Formelsammlung

Abb. 9 Interpretation von $diff(f(x), x, 1, z)$

Es sollte hier also deutlich werden, dass das Verständnis für die Ableitungsregeln mit Hilfe des Geometrie-Moduls unterstützt werden kann.

Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion erhält man als Spezialfall der Kettenregel. Diese formale Herleitung ist für Schülerinnen und Schüler allerdings oft nicht nachvollziehbar.

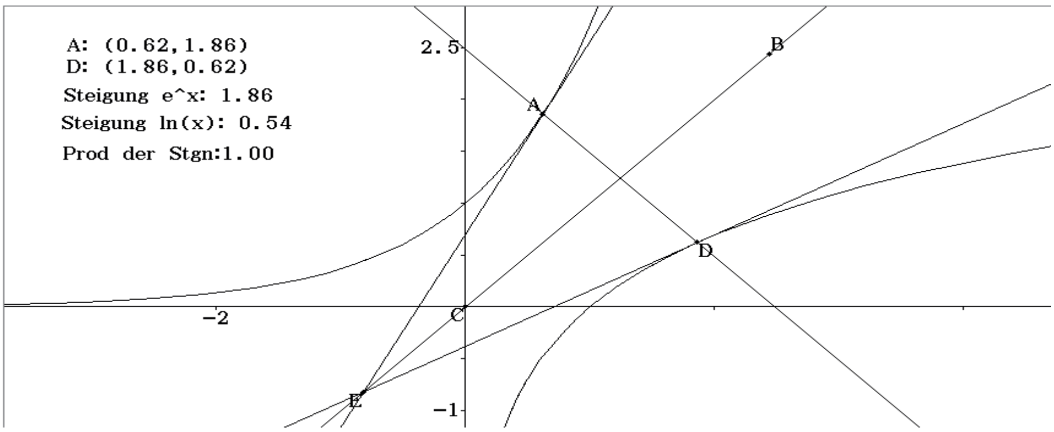

Abb. 10 Zusammenhang der Ableitungen von $f(x) = e^x$ und $f^{-1}(x) = ln(x)$

Die Abbildung 10 zeigt die Graphen von der e- und der ln-Funktion. Auf dem Graphen der e-Funktion wurde ein Punkt A gesetzt und in diesem die Tangente an den Graphen konstruiert. Der Bildpunkt D liegt auf der Normalen und dem Graphen der Umkehrfunktion. Die Tangente in D lässt sich nicht direkt konstruieren, da durch den Befehl *Tangente an Kurve* auch der Punkt, in dem die Tangente konstruiert werden soll, festgelegt wird. Dieser Punkt soll aber als Bildpunkt vom Punkt A direkt abhängig sein. Das Problem lässt sich dadurch lösen, dass der Schnittpunkt zwischen der ursprünglichen Tangente und der Spiegelachse bestimmt wird; durch diesen Punkt muss aus Symmetriegründen auch die Bildtangente verlaufen. Dabei ist die Konstruktion nur möglich, wenn die Spiegelachse nicht durch $y = x$, sondern durch zwei Punkte konstruiert wird[7]. Der Punkt A lässt sich variieren, und man erkennt, dass das Produkt der beiden Steigungen immer den Wert 1 ergibt. Für die Schülerinnen und Schüler ist es zusätzlich sehr hilfreich, dass der Zusammenhang zwischen den Punkten A und D (Vertauschung der x- und y-Werte) deutlich wird, was bei der formalen Herleitung eine besondere Schwierigkeit bedeutet.

Literatur

CiMS Hamburg – Unterrichtsgang für die Sek II mit Computer-Algebra-System, Unterrichtsversuch CiMS der Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg, 2013

Ergänzende Literatur

Bruder, R. (Hrsg.) 2006: Aufgaben mit CAS Einsatz, Modellversuch 2004/05 Hessen, Texas Instruments

Mathematik mit CAS, 2011, Band 2, Cornelsen Verlag, Berlin

Lambacher Schweizer Gesamtband Oberstufe mit CAS, 2007, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

[7] Der Grund hierfür ist folgender: Für die Konstruktion ist die Konstruktion einer Normalen erforderlich. Dieses ist nicht möglich, wenn man Geraden durch eine Funktionsgleichung „konstruiert".